ULTRAPRODUCTOS DE VARIEDADES NO SINGULARES

por

CONCEPCION ROMO SANTOS

Departamento de Algebra y Fundamentos. Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense de Madrid

Introducción

En este trabajo se estudian las técnicas de ultraproductos necesarias para la resolución de singularidades. Utilizando estas técnicas se caracteriza el ultraproducto de variedades definidas sobre cuerpos de característica cualquiera y se estudian las condiciones necesarias y suficientes para que dicho ultraproducto sea no singular.

§ 1. Ultraproductos de Sistemas Relacionales

Definición 1-1.—Una relación finita y en particular una relación de rango n sobre un conjunto A es un subconjunto de A^n.

Definición 1-2.—Un sistema relacional (o simplemente un sistema) es una sucesión

$$\mathcal{A} = < A, \quad R_1, \ldots, R_\rho, \ldots >$$

donde A es un conjunto no vacío y cada R_ρ es una relación finita sobre A.

El número α de elementos de la sucesión se llamará orden de A.

DEFINICIÓN 1-3.—Se dirá que dos sistemas relacionales

$$\mathcal{A} = < A, \quad R_1, \ldots, R_p, \ldots >$$

y

$$\mathcal{B} = < B, \quad S_1, \ldots, S_p, \ldots >$$

son similares si tienen el mismo orden y si para todo p las relaciones correspondientes R_p y S_p tienen el mismo rango. A la clase formada por todos los sistemas relacionales similares a un sistema dado se le llamará clase similar.

NOTA 1-4.—Se introducirá un nuevo concepto, el concepto de modelo. Sea

$$a = < a_1, \quad a_2, \ldots > \in A^\omega$$

una sucesión de elementos de $\mathcal{A}$. Si φ es una fórmula en las variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, se dirá que a satisface φ en $\mathcal{A}$ y se expresará mediante la notación $\mathcal{A} \sqsubset \varphi(a)$ cuando se verifique que la sucesión $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ satisfaga φ en $\mathcal{A}$ al sustituir las x_{i_j} por las a_{i_j}. Se dirá que una fórmula φ es válida en $\mathcal{A}$ y se expresará $\mathcal{A} \sqsubset \varphi$ cuando se satisfaga para todas las sustituciones por elementos de A^ω.

Un conjunto S de fórmulas es válido en $\mathcal{A}$ si todo elemento de S es válido en $\mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ se dirá que es un modelo de S.

Una fórmula en la que las variables no son libres se llamará una sentencia.

NOTA 1-5.—La importancia capital de los sistemas relacionales estriba en que las estructuras matemáticas se pueden considerar como sistemas relacionales y así se manejarán conjuntos con relaciones en vez de conjuntos con operaciones.

Sea X un conjunto en el que está definida una función f n-aria, se definirá también en X la relación $R f$ $(n + 1)$-aria de la manera siguiente:

$$< x_1, \ldots, x_{n+1} > \in R_f \iff f(x_1, \ldots, x_n) = x_{n+1}$$

Claramente las propiedades del conjunto con un operador $\langle X, f\rangle$ están precisamente determinadas por las propiedades del sistema relacional $\langle X, \{R_f\}\rangle$. Así se podrán estudiar los grupos, cuerpos y demás estructuras como sistemas relacionales.

Se pasará ya a estudiar la construcción del ultraproducto de una familia de sistemas relacionales.

DEFINICIÓN 1-6.—Sea $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ una familia de sistemas relacionales,

$$\mathcal{A}_i = < A_i, \quad R^i_1, \ldots, R^i_p, \ldots >$$

Sea D un filtro definido en el conjunto I. Se llamará producto reducido de la familia $\{\mathcal{A}_i \mid i \in I\}$ relativo al filtro D al siguiente sistema relacional

$$\prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \Big/ D = < \prod_{i \in I} A_i / D \quad , R_1, \ldots, R_p, \ldots >$$

donde el dominio

$$\prod_{i \in I} A_i/D$$

es el conjunto de las clases de equivalencia $f \mid D$, del producto cartesiano

$$\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f \mid f : I \longrightarrow \bigcup_{i \in I} A_i, \; f(i) \in A_i \right\}$$

para la relación de equivalencia $\equiv_D$ definida

$$f \equiv D\, g \Longleftrightarrow \{ i \mid f(i) = g\,(i) \} \in D$$

y la relación R_p se define por la condición siguiente:

$$< f_1 \mid D, \ldots, f_n \mid D > \in R_p \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \{ i \mid < f_1\,(i), \ldots, f_n\,(i) > \in R^i_p \} \in D$$

Si el producto reducido es relativo a un ultrafiltro entonces se le llama ultraproducto.

NOTA 1-7.—El teorema más importante de la teoría de ultraproductos es el teorema de Löv's, teorema que se usará al demostrar el teorema de resolución de singularidades en característica p.

Sea $\{\mathcal{A}_i : i \in I\}$ una colección de sistemas relacionales similares y sea D un ultrafiltro en I. El ultraproducto $\pi\, \mathcal{A}_i/D$ es del mismo tipo que los $\mathcal{A}_i$, se puede por tanto usar el mismo lenguaje L para $\pi\, \mathcal{A}_i/D$ y para los $\mathcal{A}_i$.

Si $f = \langle f_1, \ldots, f_n, \ldots \rangle$ es una sucesión de elementos de $\pi\, A_i$, es decir $f \in (\pi\, A_i)^\omega$, sea

$$f \mid D \in (\pi\, A_i / D)^\omega$$

la sucesión

$$f \mid D = < f_1 \mid D, \ldots, f_n \mid D, \ldots >$$

de elementos de $\pi\, A_i/D$ y sea $f(i)$ la sucesión

$$f(i) = < f_1(i), \ldots, f_n(i), \ldots >$$

de elementos de A_i. En estas condiciones se verifica el siguiente teorema:

TEOREMA 1-8.—*Teorema de Löv's*. Si D es un ultrafiltro en I, para toda fórmula φ de L y toda sucesión

$$f \mid D \in (\pi\, A_i / D)^\omega$$

se tiene la equivalencia:

$$\pi\, \mathcal{A}_i / D \models \varphi\,(f \mid D) \Longleftrightarrow \{ i \in I \mid \mathcal{A}_i \models \varphi\,(f(i)) \} \in D$$

COROLARIO 1-9.—Si σ es una sentencia de L, se tiene que

$$\pi\, \mathcal{A}_i / D \models \sigma \Longleftrightarrow \{ i \in I / \mathcal{A}_i \models \sigma \} \in D$$

NOTA 1-10.—A partir de ahora se considerarán sistemas relacionales del mismo tipo. Una propiedad P de estas estructuras se dirá que es una propiedad de primer orden cuando exista alguna sentencia σ tal que $\mathcal{A} \models \sigma \Longleftrightarrow \mathcal{A}$ tiene la propiedad P.

Se dirá que una propiedad P de estas estructuras es una propiedad general de primer orden cuando exista un conjunto Σ de sentencias de manera que un sistema relacional tiene la propiedad si y sólo si es un modelo de Σ.

En primer lugar se estudiará el conjunto de sentencias necesarias para establecer la estructura de cuerpo conmutativo de característica p.

Sea σ_F el conjunto formado por las sentencias necesarias para definir la estructura de cuerpo conmutativo.

Entonces se verificará que $\mathcal{A}$ es un cuerpo conmutativo si y sólo si $\mathcal{A}$ es un modelo de σ_F.

Se considera ahora la estructura de cuerpo conmutativo de característica p. Se usarán las siguientes abreviaturas: $S_1(x, y)$ abreviatura de $y = x$. $S_{n+1}(x, y)$ abreviatura de $(\exists z)\ [S_n(x, z) \wedge S(z, x, y)]$. Así $S_n(x, y) \Longleftrightarrow y = n \cdot x$. Sea $\sigma^p{}_F$ la unión de σ_F y la sentencia

$$C_p = (\forall x)\, S_p(x, 0) \wedge \neg((\forall x)\, S_{p-1}(x, 0) \vee$$
$$\vee (\forall x)\, S_{p-2}(x, 0) \vee \ldots \vee (\forall x)\, S_1(x, 0)]$$

Entonces se verificará que $\mathcal{A}$ es un cuerpo conmutativo de característica p si y sólo si $\mathcal{A}$ es un modelo de $\sigma^p{}_F$.

Un cuerpo de característica cero es un cuerpo que no es de característica p para ningún primo p. Sea

$$\Delta_0 = \{\sigma_F\} \cup (\neg C_p : p < \omega\}$$

entonces $\mathcal{A}$ es un cuerpo de característica cero si y sólo si $\mathcal{A}$ es un modelo de Δ_0. Esta última afirmación demuestra que la propiedad de ser un cuerpo de característica cero es una propiedad general de primer orden verificándose además que Δ_0 no puede ser sustituido por un conjunto finito de sentencias.

Aplicando el teorema de Lõv's a la estructura de cuerpo se obtiene.

TEOREMA 1-11.—Sea $P = \{p \mid p$ n.º primo$\}$, $\mathcal{A}_p$ un cuerpo de característica p para cada primo p y D un ultrafiltro no principal en el conjunto de todos los primos. Entonces con estos datos se verifica que

$$\mathcal{A} = \prod_{p \in P} \mathcal{A}_p \mid D$$

es un cuerpo de característica cero.

DEMOSTRACIÓN.—Véase «Models and Ultraproducts: An introduction». J. L. Bell. A. B. Slomson, pág. 97.

§ 2. ULTRAPRODUCTO DE VARIEDADES

DEFINICIÓN 2-1.—Sean F un cuerpo y M un número entero positivo. Un ideal $A \subseteq F[X_1, \ldots, X_n]$ es de tipo acotado M si $n \leqslant M$ y A posee una base formada por polinomios de grado menor o igual que M.

Una familia $\{A^i \mid i \in I\}$ de ideales de polinomios es de tipo acotado si existe un entero positivo M tal que A^i es de tipo acotado M para cada $i \in I$.

DEFINICIÓN 2-2.—Sea V una variedad afín o proyectiva de ideal A. Se dice que V es de tipo acotado M cuando A es de tipo acotado M.

Una familia $\{V^i \mid i \in I\}$ de variedades es de tipo acotado si existe un M tal que V^i es de tipo acotado M, $\forall\, i \in I$.

DEFINICIÓN 2-3.—Sean F^i, $i \in I$ una familia de cuerpos y

$$F^* = \prod_{i \in I} F^i / D$$

el ultraproducto de los F^i con respecto a un ultrafiltro D de I. Sean $f^i \in F^i[X_1, \ldots, X_{n^i}]$ polinomios que verifican: existe $n \in Z_{>0}$ tal que: i) $n^i \leqslant n$, $\forall\, i$; ii) grado $f^i \leqslant n$, $\forall\, i$. Entonces

$$f^i = \sum_{(j) \in J} c^i_{(j)} X_1^{j_1} \cdot X_2^{j_2} \ldots X_n^{j_n} = \sum_{(j) \in J} c^i_{(j)} X^{(j)}$$

$$J = \left\{ (j) = (j_1, \ldots, j_n) \mid j_k \in Z_{\geq 0},\ \forall\, k,\ \sum_{(j) \in J}^{n} j_k \leq n \right\}$$

Se llamará ultraproducto de los f^i con respecto a D al polinomio

$$f^* = \sum_{(j) \in J} c^*_{(j)} X_1^{j_1} \cdot X_2^{j_2} \ldots X_n^{j_n} = \Sigma\, c^*_{(j)}\ X^{(j)}$$

siendo $c^*_{(j)}$ la clase de F* de representante

$$(c^i_{(j)}) \in \prod_{i \in I} F^i$$

DEFINICIÓN 2-4.—Si $A^i \subseteq F^i [X_1, \ldots, X_{n^i}]$, $i \in I$ es una familia de ideales de tipo acotado, entonces se verifica que existe un único $n \in Z_{>0}$ tal que $n^i = n$ $\forall\, i$ perteneciente a algún conjunto $S \in D$. Se llamará ultraproducto de los ideales A^i con respecto a D al ideal

$$A^* = (A^i)^*_D \subseteq F^* [X_1, \ldots, X_n]$$

engendrado por los ultraproductos $f_1^*, \ldots, f_r^*$ de un conjunto de generadores $f^i_1, \ldots, f^i_r$ de los A^i, $i \in S$.

DEFINICIÓN 2-5.—Sea X^i, $i \in I$ una familia de variedades afines o proyectivas definidas sobre cuerpos F^i. Sea A^i el ideal de X^i sobre F^i tal que las A^i son de tipo acotado. Entonces el ultraproducto de las X^i con respecto a D se define como la variedad afín o proyectiva definida sobre F* por el ideal A*, se representa por X*.

Una aplicación del teorema de Löv's al ultraproducto de variedades es la siguiente:

TEOREMA 2-6.—Sean X^i, $i \in I$ una familia de variedades y X* su ultraproducto.

X^* no singular $\Longleftrightarrow$ $\{i \in I \mid X^i \text{ no singular}\} \in D$.

BIBLIOGRAFÍA

[1] BELL, J. L.: *Models and Ultraproducts: An introduction.* A. B. Slomson.

[2] EKLOF, P. C.: *Resolutions of singularities in prime characteristic for almost all primes.* «Trans. of the Amer. Math. Soc.», volume **146 (1969)**.

[3] ROMO, C.: *Resolución de singularidades de variedades algebroides sobre un cuerpo de característica cualquiera.* Monografías y Memorias de Matemática, X. Instituto «Jorge Juan» de Matemáticas, C. S. I. C. Madrid, 1976.

[4] ROMO, C.: *Número de transformaciones cuadráticas formales necesarias para que descienda la multiplicidad de una hipersuperficie algebroide definida sobre un cuerpo de característica cualquiera.* «Actas de la XII Reunión Anual de Matemáticos Españoles». Málaga, 1976.

[5] ROMO, C.: *Una caracterización del contacto maximal de hipersuperficies algebroides.* «Revista Matemática Hispano-Americana», 4.ª serie, tomo XXXVI, núms. 5-6. Madrid, 1976.

[6] ROMO, C.: *Contacto maximal en característica positiva.* «Actas de las IV Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas». Jaca, 1977.

[7] ROMO, C.: *Resolución de singularidades de variedades algebroides mediante transformaciones cuadráticas.* «Actas de la IV Reunión de la Agrupación de Matemáticos de Expresión Latina». Mallorca, 1977.

[8] ROMO, C.: *El teorema del camino mínimo en característica* p. «Actas de las V Jornadas Matemáticas Hispano-Lusitanas». Aveiro (Portugal), 1978.